物理教育法の新しい試みI

# 物理教育の初期の段階における万有引力の法則の演繹的導入の可能性

小池　康郎

平成16年3月14日

概 要

万有引力の法則（逆二乗力）をケプラーの第一および第二法則を用いて、中学校の数学レベルで導入する一つの方法を提案する。ケプラーの法則以外に要求する基礎知識は、放物運動の知識と、日常レベルの常識に基づく微分的思考法のみである。したがってこの方法によって、日常的に見る身近な現象と、宇宙規模の惑星の運動がニュートン物理学で見事に統一的に説明されるという、ニュートン力学本来の美しさを、物理教育初期の段階で示しうることになり、今後の物理教育の改善に役立つであろう事が期待される。

## 1　はじめに

朝永振一郎の名著「物理学とは何だろうか」[1] の第一章は、「ケプラーの模索と発見」「ガリレオの実験と論証」「ニュートンの打ち立てた記念碑」の順に論述されて始まる。言うまでもなく近代科学の夜明けを告げる三人の個性あふれる仕事を最初に紹介しているのである。ガリレオの地上の運動の考察、ケプラーの天文学上の発見、そしてそれを統合し、あらゆる運動を解析し予言する強力な武器を提供したニュートンの仕事が、力強く近代を切り開いていったことは物理学をかじったものなら誰でも知っている。特定の学問の魅力と意義を人に説明するのにこれほど見事な例はまたとないであろう。物理学は幸福な始まりを持ったのである。

ニュートンの運動の法則と並んで、万有引力の法則は物理学の入門コースで必修の法則である。この二つの法則はニュートンの「プリンキピア」で初めて明瞭に提示され、後者は「プリンキピア」のクライマックスをなす。そしてこの二つの法則は、物理学における基本法則の汎用性と簡潔さを見事に示す最初の例となっている。そしてそれはガリレオとケプラーの仕事を受け継ぐ形でニュートンが得た不滅の法則なのである。

そのような法則であるにもかかわらず、万有引力の法則の教育的導入法についての研究はいまだに不十分であると言わざるを得ない。多くの場合、万有引力に対する逆二乗の法則はアプリオリに示され、「ニュートンはケプラーの法則からこの法則を導いた。」と記述してあるだけである。筆者が高校生であったころ、また大学の初年級の学生であったころは、このようであったと記憶する。いうまでもなく、物理法則はアプリオリに導出されたわけではない。基本的な物理法則は、既知の実験や法則を広く吟味しなおし、多くの一見異なった現象を簡単かつ明瞭な法則に統一的に記述しなおすことによって得られる。そしてそのときに、人類の自然に対する理解はより高い地平に押し上げられ、物理学者は物理学に本来の魅力を感じるのである。

最近の高校の物理では、万有引力の法則をケプラーの第三法則から導く。惑星の軌道を円軌道として簡略化し、遠心力と引力が等しいことと、第三法則からの惑星の周期と軌道半径の関係を用いるわけである。この論法は、ニュートン自身も示し、また例えば朝永振一郎の「物理学読本」[2] に出てくる方法であり、非常にわかりやすい方法であるが、楕円軌道を円軌道に簡略化しなければならないところと、遠心力の公式という力学で比較的進んだ段階での式を用いなければならないところに難点がある。したがって高校の「物理 I」では万有引力は出てこない。理系学生のための「物理 II」になって初めて登場する。言い換えれば、高等教育を受けたほとんどの学生が万有引力の法則を習わないままで教育を終えることになる。

ニュートン力学の驚嘆すべき点は、放物体などの地上の身近な運動と、天上界にある惑星の運動を同時に統一的に説明したところにある。歴史的に見ても、プリンキピアの衝撃は主にこの点にあったであろう。それがゆえに、近代合理主義の発展の中で、物理学は思想的にも多大な影響を与えてきたのである。この驚きを見ないまま、大多数のいわゆる文系学生に、近代合理主義に基づく教育を与えることは、何か骨抜きの教育になっているのではないか、と我々物理学者は考えるのである。逆にこ

の驚きを物理学を習い始めて比較的すぐに体験すれば、学生・生徒を更なる物理学へのアプローチに駆り立てる良い材料になるであろう。また惑星の運動として、楕円軌道をしっかりと教えておくことは、彗星や流星群に引き付けられる若者の心を、物理学に向かわせる良いきっかけになるに違いない。その意味において、ケプラーの法則が高校の「物理 I」から消えてしまったことは、大変残念なことである。

この小文の目的は、中学３年レベルの数学を使って、ケプラーの法則（第一および第二）から逆二乗法則を導くことができることを示すことにある。そしてケプラーの法則と万有引力の法則を関連づけて教える大切さを、再度考察することである。「ファインマンさん、力学を語る」[3] に引用されているファインマンの言葉を少しもじって言えば「簡単な法則には初等的な説明法がある」事の一例を示したい。万有引力の法則を「物理 I」あるいはそれ以下のレベルの課程で教育可能であることを示し、またそれに関連して力学の教育の初期の段階に強調しておけば役に立つであろういくつかの事柄を提示している。今回導入する方法では、ケプラーの法則と地上の放物運動を組み合わせるので、地上の運動と天上界の運動がニュートン物理学で統一的に説明できるということをきわめて明瞭に示す事ができる。

ケプラーの法則と万有引力の法則の関係については、恐らく数え切れないほどの書物が出版されてる。勿論その最初のものはニュートンその人による「プリンキピア」である [4]。しかしほとんどの物理学者と同じく「プリンキピア」でさえも筆者はまともに読んでいないことを白状しなければならないし、読者はそれを許してくれるであろう。プリンキピアで用いられている数学は、良く知られているようにその当時でさえ難解であり、そしてさらに悪いことには力学を語るに適した言葉「微分・積分学」によるものではなく、高度な「幾何学」によっているのである。

筆者の今回の方法は非常に初等的なので、本当にこれまで使われていなかったのだろうかと心配になって、機会あるごとに書物にあたってみた。そのいくつかは示唆に富んでいるので、ここに言及し、著者に敬意を表すと同時に読者の参考に供したい。日本の超一級の物理学者で、物理学教育に関して鋭い見通しを持っていた朝永振一郎 [1, 2] の書物はいつも物理教育に携わるものの座右の書であろう。そして朝永と同時に「くりこみ理論」でノーベル賞を受賞したファインマンの著書も [3, 5]。ついでながら単なる空想的・思弁的な世界にとどまらず、現実世界に立脚しつつも単なる現象論に陥ることなく得られた「くりこみ理論」が、日米

の物理教育にも秀でた物理学者の手によって展開されたことは、物理学の本質について、考えるに足る材料ではないだろうか？

ファインマンは「ファインマンさん物理を語る」[3] で、ニュートンがやったように幾何学を使って、逆二乗力から楕円運動を導いている。微分積分学を使わないで行なうこの証明は中学生あるいは高校生のデカルト精神を満足させるに充分であろう。ただこの証明は簡単ではない。

文献 [6] によれば、ニュートンは楕円軌道から逆二乗力を導きはしたが、「逆二乗力から楕円運動を導くこと」については、ニュートン自身この証明に成功したかどうか、後世大問題になったそうである。幾何学的証明に徹したとしてもファインマンの証明に見られるように楕円の接線など、優れて微分的な技法を使わなければならない。微分積分の厳密な展開は、勿論後の世の物理学者・数学者の功績であり、解析学としてデカルト的な方法を用いて可能となった。その恩恵に現代の物理学者は浴しているのである。

いわゆるニュートン力学を完成したのは後世の大陸学派の功績である [6, 7]。その際活躍した人々は、ラグランジュ、オイラー、ガウス、ダランベールなどの人々であり、これらの人々は物理学者とも、数学者とも考えることができる。物理学と数学の幸福な時代であり、数学者と物理学者の偏狭な縄張り意識は出ようにも出ることができなかった時代である。大陸学派の努力はニュートン力学をできるだけ公理的にかつ厳密に展開するために非常に役に立った。物理学者や技術者を目指す若者が、できるだけ短時間に最前線にたどり着く為の訓練には、理想的な方法を開発してくれたのである。ケプラーの仕事から大陸学派の仕事については、物理学と数学の分化も未発達であったため数学者の中にも示唆に富んだ文を書いている人が多い。その中で特に森毅をはじめとする「すべての人に数学を」と主張した人々の数学教育に関する諸文は物理学教育のためにも大いに参考になるであろう [8, 9]。

これまでの物理教育法の研究は、ニュートン力学をどのように論理的に整備・完成させ、またどのように有効に教育するかという視点に貫かれている。つまり、物理学を志す若者の存在は自明のこととされ、そのものたちをどうやって早く第一線に導くかという視点である。しかし現在時代が求めているものはそれとは少し異なった視点であるように思う。現在求められていることの重要なポイントを大上段に振りかぶって言えば、物理学の魅力を多くの人に認めてもらうと同時に、物理学を現代の文明総体の中で、文化として客観化し、相対化することによって、21 世

紀の新しい文化の礎とすることではないだろうか？平たく言ってしまえば、すべての人に物理学の魅力を伝えることであり、また卑近なところでは理科離れに歯止めをかけることである。この小文の目的は、一般の人々に物理学の魅力を知ってもらう一つの方法を提示することであり、また中学生、高校生の中で、将来物理学を学んでみようかと思う人を増やし、いわゆる理科離れを少なくするための一つの試みである。具体的には「ケプラーの法則から逆二乗の法則が得られる」極く簡単な説明を示す。そしてこれまで調べたところ、この説明を使用している文献は教科書類を含め皆無であった。したがってここに小文をあらわすことの意義を感じているしだいである。

インターネットでも「ケプラーの法則」で検索してみた。勿論玉石混交のこの世界では恐ろしい数のインターネット文献が網にかかった。その中で、高等学校の先生の努力の記録が強く心に残った。特に米田雅人氏 [10] の方法は、筆者の今回の方法にその着眼点およびその姿勢ともに、非常に近い方法であり、強い感銘を受けたことを記しておきたい。しかしここで展開しようとしている説明法は、高校初年級の生徒には簡単でより受け入れやすいことを、読後にわかっていただけよう。そして今回の方法は、一貫した初等物理学教程をより判りやすく、かつ魅力的にという筆者の試みの一環であり、それの可否については後続の論文で読者の判断を仰ぎたいと考えている。

昨年の出版業界の大きな話題の一つに、山本義隆氏の出版物が大きく取り上げられたことがある [11]。『何故近代科学技術が、ヨーロッパに生まれたか』という問題に、遠隔作用たる重力概念の発見にスポットを当て、ギリシア古代から、ルネッサンス期を経て、ニュートンの時代まで、概念の発達史を丹念に調べ上げたこの著作は、多くの賞を受けた。その受賞理由として、理系と文系の溝を埋める作業であったという点が大きく評価されているように、ニュートンの仕事を文系の人にも解るように紹介するということは、今だからこそ非常に大切になっているように思われる。

今回の方法は、筆者が法政大学のいわゆる文系学生に長年教えた経験に基づき開発された。また同じく法政大学の通信教育のスクーリングで、２０代から７０代までの混成クラスを教えた経験にも基づいている。本科学生、通信教育学生を問わずほとんどの学生が、高校時代物理学を敬遠していた学生であり、特に社会人や主婦の人たちが高校時代の苦手意識を克服しようと受講してくれ、理解を示してくれたことは、筆者にとっ

て大きな喜びであった。これまで筆者の講義に反応を示してくれた学生諸君に感謝の気持ちを表明しておきたい。

第二節で、簡単にケプラーの法則を復習する。第三節は、この新しい説明法を使うための準備であり、ここで用いる微分的な考え方を説明してある。第四節がこの小文の主要部であり、時間がない方は、ここだけ読んでいただければ、基本的なことはわかっていただけよう。第五節と、第六節は、教育現場でここでの説明を採用される際に、さらに生徒・学生に興味を持たせるために参考になると思い、蛇足ながら付け加えた。第五節はニュートンの理論が、ケプラーの法則を超えてさらに複雑な現象に対する予言能力を持つことが、ニュートン理論の勝利であることへの改めての指摘であり、第六節はケプラーに対する筆者の思い入れである。

## 2 ケプラーの法則

ここでケプラーの法則を思い出しておきたい。

周知のようにケプラーの法則は三つの法則からなっている。まず最初の二つが発表され、最後の第三法則はずっと後になって発表されている。最初の二つは互いに密接に関連しており、また万有引力の法則はその二つから導くことができる。

第一法則と第二法則は以下のとおりである。

- 惑星の軌道は太陽を焦点のひとつとする楕円である（第一法則）
- 太陽と惑星を結ぶ線分がある一定の時間に掃く面積は、惑星がどこにいようとも一定である（第二法則）

図 1 に楕円を示す。

当時の認識から言うと、惑星の軌道が円から楕円に変わったことは、非常な衝撃であった。ガリレオでさえ、それを絶対に受け入れようとしなかった。山本義隆が言うように [7]、完全な図形である円から、いびつな図形である楕円へと軌道の認識が変わることによって、当時の学者はその原因を考えざるを得なくなったであろう。

実際現代の学生たちも、第一法則は奇異に思うらしく、太陽がないもうひとつの焦点に何があるのだろうと疑問を持ったりする。対称性が崩れているので、対称性を回復したいと思うのだ。このような学生は文系といえども、理系のセンスが良い。何も疑問を持たず、ケプラーの法則

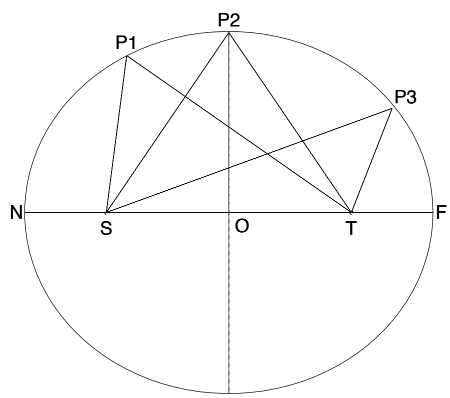


図 1: 楕円

楕円とは、二つの定点 S および T に対して、PS+PT=一定となるような点 P の集合である。S および T を焦点という。楕円には長軸（ST を結ぶ軸）と短軸（中心点 O を通ってそれに垂直な軸）の二つの対称な軸がある。

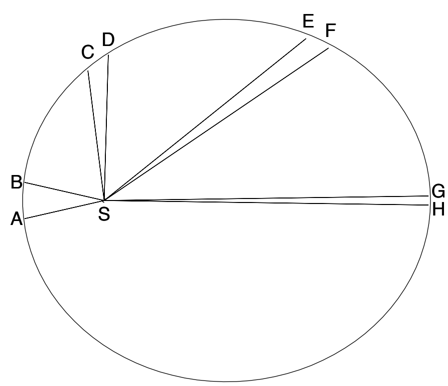


図 2: ケプラーの第二法則

惑星が楕円軌道上 A,B,C,...,H と移動していくとき、A,C,E,G から同じ時間がたてば、B,D,F,H に来るとする。そのとき扇形の面積 ABS,CDS,EFS, GHS は一定である。面積速度一定の法則と呼ばれるこの法則は、後に角運動量保存の法則として一般化された。第一法則では、太陽は焦点の一つとされるので、太陽系の中心が太陽であるとは理解できない。この法則が太陽系の中心は太陽であることを告げているのである。

を盲目的に受け入れる理系学生よりも、創造性は豊かであるのではないだろうか。「対称性」および「対称性からのずれ」は、物理学のあらゆる段階で現れる。その最初の例として、ケプラーの法則を位置づけることもできるだろう。そして後で見るように、対称性を使って逆二乗法則を導くことが、ここでの新しいやり方なのである。

第三法則は、第一法則・第二法則の発表から十年遅れて、1619 年に発表された。

- 惑星の周期の二乗と長軸半径の三乗は比例する（第三法則）

以上の三法則がケプラーの法則と呼ばれるものである。

議論の展開のために、楕円を簡単に復習しておこう。楕円の定義の一つとして、動点 P と定点 S,T の間に、$SP + TP =$ 一定 という関係があるとき、動点 P の軌跡が楕円であるとしてよい。これをもとに糸、画鋲、用紙、鉛筆を使って、実際に楕円を書かせるのがよいだろう (図 1)。このとき二点 S および T が楕円の焦点である。惑星軌道の場合、焦点の一つ S に太陽があるが、T は何の特別な意味を持たない。明らかに図形上の対称性がない。惑星の軌道には対称性があるように見えるが、太陽の位置はそれを崩してしまう。初めて第一法則を聞く学生は、違和感を抱くのである。

第二法則は、その対称性は初めから存在しないことを告げる。太陽に近い側と、太陽から遠い側とでは、惑星の速さが違う。近日点では、惑星は太陽に最も近づくとともに、その速さは最大となる。一方遠日点では太陽から最も遠く、速さは最小となる。しかし奇妙なことに、軌道の形は近日点と遠日点で全く等しいのである (図 2)。

# 3　万有引力の法則を導く前に教えておくべきこと

## 3.1　微分的な考え方

物理学は、論理的な学問である。天下り式の教え方はできるだけ避けなければならない。また物理学は数学ではない。最初に公理を持ってきてはいけない。残念ながら、現実はかなり公理に近い形で、基本法則を持ってきて、議論を展開しているのが現状であろう。

物理学では、最初はできる限り身近なものから出発し、実験を効率的に行い、また当たり前と思われていることを見直しながら、物事を統一

的に、一段と高い立場で見直す訓練をしながら教育を行ないたいものである。それが物理学が進んで来た道であるから。

この小文の結論を簡単に言うと、万有引力の法則を導く前に教えておかなければならないことは、ニュートンの運動の法則と、放物体の運動の二つだけである。したがって、力学の教育の比較的初期の段階で万有引力の法則を教えることができる。

ただし説明を素直に飲み込ませようと思うなら、言い換えれば、これが重要なことであるが、学生に合点がいったという発見の喜びに満ちた理解をさせたいと思うなら、物理学に対するアプローチをかなり変えておかなければならない。この節では、そのアプローチの仕方を議論する。私見ではそれは物理学的な見方をしっかり身につけさせる一つの方法と思えるのである。

微分を物理学初期の教育に取り入れるかどうか、根本的な問題であるが、ここでは立ち入らない。しかし、微分的な考え方なしでは、物理学教育はどうしても天下り的なものになってしまう。むしろ微分的な考え方を、一貫して貫くやり方を模索すべきであると筆者は考える。

その第一段階は、次の事柄を学生・生徒に納得させることである。

> 空間の関数である物理量においては、その関数値は狭い範囲では一定とみなすことができる

これは連続関数を頭に描いているから、ルベーグ積分などを基にする現代的な関数論には当てはまらない。またこの考えは「自然はジャンプせず」と言っているのであるから、量子論には使えない。しかしこれは日常的に使っていることである。たとえば、宇宙規模で考えれば、私に働く重力は空間の関数であり変動する量である。しかし地上の生活では、中年をとっくに過ぎた私の体重は、よほどダイエットをしないと減少せず、つまり一定である。重力が、地表という狭い範囲で一定でなければ、体重測定は意味を成さなくなるであろう。勿論これは微分のもともとの発想である。微分的な発想を早いうちに身につけさせる必要を筆者は感じているのだがいかがであろうか？

> 曲面は狭い範囲では平面と考えてよい

これも地球を考えれば日常的に行なっている近似である。むしろ日常生活で、地球が球面であると認識して行動している人はいるのだろうか？そしてこれは次の結論に導く。

位置の関数であるベクトルは、狭い範囲では方向も含めて一定と考えてよい

地球は丸いので、重力の方向は場所によって異なっている。だが我々は重力はただ下方に働くとし、我々の近傍では地表は平面だから重力は同じ方向に向いていると考えて、何の矛盾も起こさない。

以上の考え方をいたるところで説明して学生になれさせておくことが望ましい。

## 3.2 放物体の運動

別の機会にこの考えを詳しく展開するが、力学の授業では静止した物体の議論の後、落体の法則を実験を元にしっかりと議論すべきであると考える。言うまでもなく、落体の法則は、実験の大家ガリレオによって発見された。ガリレオは坂道を使って実験し、純粋な落体の場合は思考実験に頼らなければならなかったが、今は落体の実験装置が簡単に手に入る。この実験は重要であるから、すべての高校で実験が行われるべきであると、筆者は考える。

落体の法則は重力加速度を $g$ として

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

であり、また水平方向に初速 $v$ で投射された物体は、水平方向には

$$x = vt \tag{2}$$

で運動するから、原点から初速 $v$ で水平に投げられた物体の軌道は、式 (1)、(2) から時間 $t$ を消去して

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2 \tag{3}$$

となる。さらに剛速球の投手の投げたボールは直線を描くように見えるが、実際は式 (3) に従う放物線を描いているのだと説明を加えておきたい。このことはもちろん 3.1 で述べた考え方を日常的に使っていることの一つの例となるし、後で惑星も剛速球投手のボールの運動と同じであるという論理を使うので、その伏線となる。

## 3.3　月は地球に落ちている

地球に高い山があったとしよう。そこから大砲を撃てば、しばらく飛んで地表に落ちるだろう。

次に、大砲の砲弾の初速を大きくしてやる。前より遠く飛ぶであろう。もっと大きくすれば、さらに遠く砲弾は飛ぶであろう。

さらに大きくしたら？

この考えを元に月も地球に落ちていることを示す。ニュートン自身によるこの説明は前出の「物理学読本」などに記述がある。これによって月が地球を周回するのは、地球の引力によるという予想を立てることができる。同様に惑星も太陽に落ち続けている … 惑星は太陽の周りを公転しているという発想が生まれる。惑星には太陽の引力が働いているのであるという推論をするための、非常に大切なプロセスである。

## 3.4　太陽に向かう引力

この節で問題にしたいのは、「太陽が惑星を太陽の方向に引っ張っており、その強さは惑星と距離の間の関数である」ということを、どのように導けば良いのかということである。

もちろん、このことはケプラーの第二法則が教えてくれるのである。「中心力では角運動量は保存する」ことを証明するのは少し進んだ力学の教程では、スタンダードなものである。しかしながらそれは「物理 I」の範囲を超えてしまう。

一番簡単なのは、前節の推論で当面は満足することである。「地球は月を地球の中心に向かって引き付けている」「同じように太陽は惑星を太陽の中心に向かって引き付けている」。「問題はその大きさがどのような法則に従うのか」と問題を設定してしまう。これは大きな教程の修正なしで、万有引力の法則を導くのに有効な方法であろう。

もうひとつの方法として、筆者が考えているのは、力学的エネルギーの保存則を、物理教程の柱となす方法である。この考えは、別の機会に展開してみたいが、ここではあらすじだけを述べ、その文脈でケプラーの第二法則を使って何が言えるかを考えてみたい。

ケプラーの法則を定性的に吟味してみよう。「遠日点では惑星の速さは最も遅く近日点で最も速い」ことが直ちにわかる。つまり遠日点を越せば惑星は太陽に「落ちて行き」、したがって太陽にどんどん近づくとともに、その速さが速くなる。また近日点を越すと勢いのついた惑星は太陽

から離れて行き、その結果速さが遅くなる。

地上の運動で力学的エネルギー保存則を議論するときに、ジェットコースターなどを使って「落ちて速くなる」「勢いのついた物体が上昇し、速さは遅くなる」ことを十分例示しておけば、「惑星も同じ原理に従っている」ことを説明できよう。

もちろんこれは力学的エネルギーの保存則として定式化できる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V = 一定 \tag{4}$$

ここでケプラーの法則に見られる対称性を使うことができる。遠日点・近日点を除けば、どの位置をとっても、太陽から同じ距離になる位置が他に一度ある。太陽に近づく位置と、太陽から遠ざかる位置である。「どちらの位置でも速さは同じになる」ことがケプラーの第二法則から導ける。つまり太陽からの距離が同じなら、太陽に近づく場合も、遠ざかる場合も速さが同じになることが言える。ちょうど投げ上げられた物体が、同じ高さの位置にあるとき、上昇するときと下降するときとで、速さは全く等しくなることと対応している。力学的エネルギー保存則を仮定すれば、この二つの位置で位置エネルギーは一致する。すなわち「位置エネルギーは太陽からの距離にだけ依存する」ことが推論されよう。まさに惑星は太陽に落ちながら加速されて近づいていき、近日点で速さは最高になるが、その後勢いあまって太陽から遠ざかる。ジェットコースターみたいなものであるのだ。

## 4　逆二乗力の導出

さていよいよ逆二乗力をケプラーの法則から導いてみよう。あっけないほど簡単であることに読者は驚かれるであろう。

問題を次のようにたてておく。

> 地球が月を引き付けているように、太陽が惑星を引き付けている。その引力の大きさはどのようにあらわされるか？

まずこの引力は地上にあっては良く知られた地球への重力となる。重力はそれを受ける物体の質量に比例するから、惑星に働く引力は惑星の質量 $m$ に比例する。一方加速度は質量にかかわらず一定である。したがってまず加速度で考えよう。地上という狭い範囲で一定であった重力加速度も、3.1 節で見たように、広い範囲では位置の関数であろう。

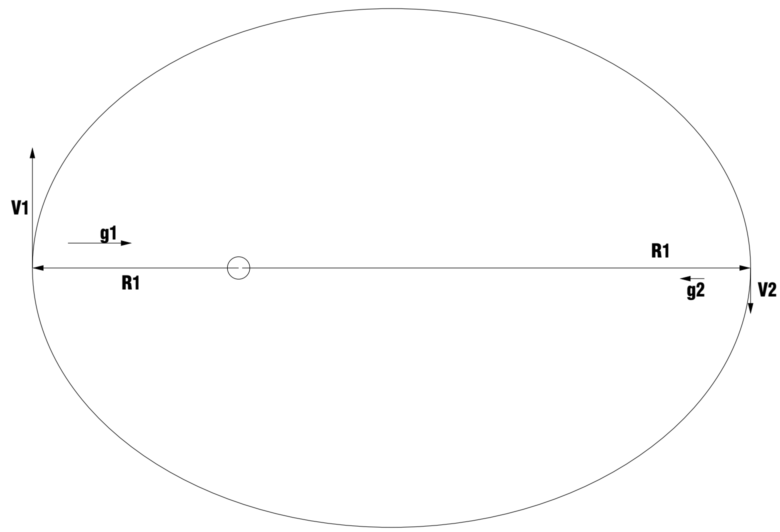


図 3: 諸ベクトルの近日点と遠日点における向き

近日点と遠日点では、位置ベクトル $R$ は長軸の上にある。惑星の速度は、接線方向だからそれに垂直であり、また向心加速度は太陽に向くから、速度に垂直となる。近日点でも遠日点でも、その近傍においては、水平に投げられた放物体の運動とみなしてよい。

太陽と惑星の間の距離を $R$ とする。引力は $R$ にどのように依存するであろうか？

近日点と遠日点で考える。3.1 で指摘したようにごく狭い範囲をとれば惑星の軌道はほぼ一直線であり、近日点遠日点では太陽と惑星を結ぶ直線（長軸）に垂直である。

さらに遠日点と近日点の近傍では引力の大きさ・方向ともに一定とみなしてよい。したがって惑星の運動は、剛速球の投手の投げるボールの運動と全く同じ論理で記述できる。すなわち真下に向かう一定の重力の中での、水平に投げられたボールの運動である。

近日点にあるとき、太陽と惑星の距離を $R_1$、惑星の速さを $v_1$ とする。また一方、遠日点でのそれを、それぞれ $R_2$、$v_2$ とする。ケプラーの第二法則— 面積速度一定の法則—は三角形の面積の関係になってしまうから

$$\frac{1}{2}v_1 \mathit{\Delta} t R_1 = \frac{1}{2}v_2 \mathit{\Delta} t R_2 \tag{5}$$

勿論 $\mathit{\Delta} t$ は等しいとする時間であり、軌道の直線近似が良いよう、充分小さいとする。これから直ちに

$$v_1 R_1 = v_2 R_2 \tag{6}$$

近日点と遠日点での惑星の速さが違うのに、その軌道の形は全く等しい。楕円の対称性をここで使うのである。重力加速度が等しい場合、放物体の運動で明らかなように、物体の速さが異なれば軌道の形は変わってしまう。したがって重力加速度は近日点と遠日点で異なっていることが結論される。近日点での重力加速度を $g_1$、遠日点でのそれを $g_2$ とすれば、水平方向に投げられた放物線の式から

$$\frac{1}{2}\frac{g_1}{v_1^2} = \frac{1}{2}\frac{g_2}{v_2^2} \tag{7}$$

式 (6) と式 (7) から

$$g_1 R_1^2 = g_2 R_2^2 \tag{8}$$

が容易に導ける。式 (8) の値を $C$ としよう。$C$ を定数として、その惑星については

$$g = \frac{C}{R^2} \tag{9}$$

となっていることが予想される。

ここまでで、逆二乗を予想することができた。場合によっては、ここで議論を止め、「詳しい計算によると、ニュートンの万有引力の法則を導くことができる」と済ましてしまうこともできるだろう。

余裕があれば、思考実験を用いて、式 (9) が正しいかどうか考えてみたい。もちろん、近日点でも遠日点でもない楕円の他の部分でこれを導くことができるが、初等的という制限をつけるとそれは難しい。したがって、思考実験に頼ることにするのである。

太陽系は今からおよそ 46 億年前に形成された [12]。そのとき惑星も形成され、惑星に初速度が与えられたのである。その際に気まぐれで、ある惑星の太陽から近日点までの距離が今と同じで、近日点での早さが少し早くなっていてもおかしくはない。ケプラーの法則は、どの惑星でも成り立っているから、この仮想的な惑星の運動に対しても、成り立つであろう。その惑星の軌道は楕円であるが、仮定によって近日点は同じだが、遠日点が少し遠くなるであろう。その遠日点までの距離を $R_3$ とし、そのときの加速度を $g_3$ とすれば、近日点での引力は同じだから

$$g_1 R_1^2 = g_3 R_3^2 = C \tag{10}$$

ここで、仮想的な初速度は自由に変えられるから、$R_3$ はそれに伴って変動するが、それに対して式 (10) が成立し、したがって式 (9) は正しいと結論することができる。

さらに思考実験を続けよう。たまたま質量の異なる二つの惑星が、まったく同じ楕円軌道を描くと仮定してみよう。楕円軌道であることで、すでに第一法則は使ったが、第二法則は、一つの惑星で角運動量が一定であることしか告げてくれない。したがって式 (9) の $C$ は惑星によって異なるかも知れない。

ケプラーの第三法則が、$C$ は太陽系の惑星すべてで共通していることを教えてくれる。質量の異なる二つの惑星が、全く同じ楕円軌道を持つとすれば、その長軸半径はもちろん等しいので、周期は一致しなければならない。言い換えれば、近日点での速度は等しくなり、上記の議論をたどれば、二つの惑星は共通の $C$ を持たなければならない。

このことはガリレオのピサの斜塔の実験と比較されよう。落体が同じ距離を落下するのに要する時間は、落体の質量などの属性に依存しない。同様に惑星が太陽に落下し、太陽を一周するのに要する時間は、軌道が同じならば、惑星の質量などの属性に依存しない。

惑星に対する太陽からの力は、ニュートンの運動の第二法則より、惑星の質量を $m$ として

$$F = mg = m\frac{C}{R^2} \tag{11}$$

と書ける。運動の第三法則（作用・反作用の法則）から $F$ は太陽の質量にも比例しなければならない。したがって $C = MG$ （$M$ は太陽の質量）と置けば

$$F = G\frac{mM}{R^2} \tag{12}$$

を導くことができる。$C$ は太陽系の惑星に共通する定数であった。立場を変えて考えると $G$ は太陽が変わっても変化しない定数であろう。惑星の質量にも太陽の質量にも依存しない「宇宙普遍の定数」であろう。

以上、ニュートンの運動の法則、放物体の運動、ケプラーの法則、そして思考実験により万有引力の法則の関数形を導いた。

# 5　今回の方法についてのコメント

## 5.1　方法についての考察

ここでやったことは、ケプラーの法則を使って、万有引力が示唆され、それは式（12）になるはずであるということである。

力が求まったら、その力を使って、運動方程式を解いて、実際に惑星の運動が軌道になる事を示さなければならない。一般解を導くことは、初等的な数学レベルでは不可能である。ニュートンがハリーに説得されてプリンキピアを書く動機となったのがこの問題である。文献 [6] に詳しく論じられているように、ニュートンがこの問題を真に解いたかどうか、後の世に問題にされ、それが原動力となってニュートン物理学が整備されていったのである。そのような難問を初等的に解くことはできないのは当然であり、前節で示したやり方で興味を持った学生が、更なる物理学への興味を沸き立たせてくれれば、この段階での教育は大成功であると言えよう。

それでも楕円が運動方程式の解になっていることを機会があるごとに示すことは、大きな意味がある。そのような努力は、これまで多くの人がされてきた。Web で見る限り、高校での努力はすばらしいものがあるし、また計算機を用いてそれを示している例も多い。いずれにせよ、力を見つけたら、それを用いて運動方程式を解く段階に入ることができる。ここでは力をアプリオリに与えないことが主眼であるから、この問題にはこれ以上立ち入らない。

ケプラーの法則を証明したのではないから意味がないと思われる読者もおられるかもしれない。しかし物理学はそのように進んできた。湯川秀樹が中間子論を展開したのは、核力のレンジを考えて、中間子の質量の予言をしたのである。核力を使って、あらゆる現象を予言したのではない。力の予想と、その力を用いて方程式を解き、現象を説明することは別物なのである。ちなみに核力の研究は、半世紀以上もたって、まだ終結していない。さらに基本的な理論である QCD をといて、原子核現象を説明する日はいつのことか？

大切なのは初めて聞く生徒に感動を与え、さらなる意欲をかきたてることである。方程式を解くにはさらに勉強しなければならないというのも意欲のうちであろう。

「はじめに」で述べたように、軌道を円軌道と考えて遠心力から引力を求めるやり方が普通に行われている。実際このやり方でフックが逆二乗を知っていたというし、ニュートンもそうだった可能性は大いにある。しかしハリーがプリンキピアの著作をニュートンに勧めたのは楕円軌道が出てくることに驚愕をしたからである。楕円が彗星を含めた惑星の軌道であるし、教育のはじめから楕円を使いたいと筆者は思う。

対称性を使えるというのは、逆二乗力だからである。たとえば力が逆

三乗であるとしたら、軌道は楕円ではなく、左右の対称性はなくなる。ここでの簡単な方法が使えることは、まことにラッキーなことなのである。

しかし、この点においても歴史は繰り返している。古典力学と量子力学の解が、クーロンの法則を使ったラザフォード散乱に対してだけは完全に等しいから、その後の量子論の発展が保障された。ポテンシャルに直して $1/r$ はやはり特殊な関数であり、だから自然界にごく普通に現れるのであろう。

ここで物理学者の多くが、ニュートンのプリンキピアを読んでいないことについて触れておきたい。デカルトを専攻する哲学者がデカルトを読んでないことはありえない話だから、文系の研究者あるいは研究者を志す者がこのことを聞いたら奇異な印象を受けることもあるようである。このことは物理学の性格を良く表している。物理学は自然を記述する抽象化された学問なのである。

ニュートンの自然に対する思いと、現在の我々の思いは相当に異なっている。ケプラーもニュートンも、神の作り給うたこの世界の法則を知りたいという欲求で研究を続けた。時代はまだまだ合理主義にはほど遠かった。中世の名残である魔女裁判に、ケプラーの母親はかかることにさえなった。プリンキピアの刊行のころ、アメリカでは史上最悪のセーラム魔女裁判事件があった。こう書けばケプラーもニュートンも、古い時代の悪弊と戦う合理主義者と言うイメージを持つ読者もあるかもしれないが、彼らも時代に生き、時代の精神を共有していたのである。

前述のように、ニュートン物理学は時代とともに整備されていった。合理主義的に書き直されて行ったのである。したがって物理学を学ぼうとする姿勢さえあれば、誰にもわかりやすくなった。一方原典であるところのプリンキピアの日本語訳は、長い間限られたものであったし [13]、チャンドラセカールの現代的解釈による書き直し版 [14] が、日本語でも読めるようになったのは、ごく最近のことである。

## 5.2 ケプラーの法則と万有引力の法則その後

ニュートンが万有引力の法則を発見した後ずいぶん経ってプリンキピアを出版したことは良く知られている。したがって彼がどのようにして万有引力の法則に到達したかはプリンキピアからは判然としない。ケプラーの仕事を彼が少なくとも若い頃はさほど評価していなかったらしいことから、「ケプラーの法則を使って彼は万有引力の法則に到達した」と

言ってしまうのは恐らく間違いであるのだろう。
　これに良く似たことは、つい１００年前に繰り返された。「アインシュタインはマイケルソン・モーレイの実験から特殊相対性理論にたどり着いた」ということはどうもないようである。
　しかしながら、「どのような発想から天才たちが彼らの理論に到達したか」と、「その理論がどのようにその時代あるいはすぐ後の時代の人々に受け入れられた」かは異なっていてもよいし、理論が画期的であればあるほど、異なっているのが当然であるように思われる。そして一般の学生・生徒に対する教育的観点からは、後者のほうがより重要だと思うのである。
　光の速さの測定を通して、地球の（エーテルに対する）速度を測る試みの失敗を告げるマイケルソンモーレイの実験は、まさに「不思議」な結果を生んだ実験と言わざるを得ない。それを逆手に取ったような「特殊相対性理論」はさらに当時の人々の驚きであっただろうし、マイケルソンとモーレイの実験を基とする「特殊相対性理論」という構図は、相対性理論を初めて学ぶものにとっては理解しやすい構図である。実際筆者が大学生のときはそのように教わった記憶がある。
　プリンキピアで、ニュートンがケプラーの法則と万有引力の法則を関連付けて議論しているのは事実であるし、それを読んだ当時の人々の感銘は、地上の運動と天上界の運動が同じ理論で記述されることにあったに違いない。このことによって、物理学は「普遍的な真実」、「普遍的な法則」を掲げて、近代合理主義の旗手になったし、あらゆる学問は一度は物理学を模倣しようとしたか、またはその呪縛から逃れようとしたと言っても過言ではないであろう。このことを忘れてしまって物理学を教育することは、物理学の意義を見せずに物理学を押し付けるものであると言えるのではなかろうか。
　したがって筆者は「ケプラーの法則から万有引力の法則が導かれた」という言い方が当を得ていると考えるし、教育課程でもそれを取り入れたいと考えるのである。
　さて、ケプラーの法則から万有引力の法則に理論を一般化すると、より高い立場の法則を人類は発見したことになる。しかしより高い立場とはどういうことなのか？
　それを最も印象付ける歴史的事件の一つは「海王星の発見」であった。
　ケプラーの時代、六個しか見つかっていなかった惑星は、天王星の発見によってさらに増えることになる。実際最初ケプラーは惑星が六個し

か存在しないことを、証明しようとしたことは良く知られているが、事実によってそれは否定されることになったのである。しかしこの天王星の動きを観測すると、ケプラーの法則から外れた動きをしていることが判明した。

新しい現象が観測されたとき、物理学ではいくつかの仮説が提出されるのが常である。このときも太陽から大きく離れた天王星では、万有引力の法則は成り立たないのではないかなどの説も出た。

一方で、万有引力の法則に基づき、未知の天体があってそれが天王星に引力を及ぼし、そのために天王星の軌道が楕円からずれるのであるという考えも、当然のことながら幾人かの頭に浮かんだであろう。

ここに物理学史上有名なドラマが展開する。

まず問題を解くことが難しいことを認識する必要がある。天王星は太陽の引力を強く受けるが、未知の天体の引力も受けている。すなわち、関係する天体は、太陽・天王星・未知の天体の三者になる。これはその後三体問題と呼ばれることになる最初の例の一つである。三体問題を一般に解くのは大変に難しく、後のポアンカレの理論から、現代のカオスの理論に至る端緒になった。

太陽、天王星、未知の天体の三体問題は、未知の天体からの引力が、太陽からの引力よりもずっと小さいという仮定の基に解くことができた。摂動計算の最初の例の一つであり、摂動計算はその後現在に至るまで、物理学者の常套手段となっている。

アダムスとル・ベリエという二人が独立にこの問題を解いて、未知の天体の場所を予言した。そしてそれぞれ天文台に観測依頼を出したが、1846年ガレがル・ベリエの予言に基づいて海王星を発見した。先に計算したアダムスの依頼の手紙は、彼が依頼した天文台では無視されたのである。

このように、ニュートンの理論は、二体（太陽、惑星）だけではなく、三体以上にも応用できることで、その汎用性を示している。その後、三体問題あるいは四体問題を解くことは、物理学の一つの大きな問題であり続け、ミクロの世界でも「量子力学における三体問題・四体問題」は、現在原子核物理学の中でも重要な課題である。そして筆者もその領域に研究の主たる軸足を持っている。2003年6月、アメリカのデューク大学で、筆者の研究分野の国際会議が開かれた折、歴史を振り返って我々の研究分野を考えるという意味で、アダムスとル・ベリエの話が講演の中に盛り込まれていたことを付記しておきたい。

万有引力というからには、すべての物体間に引力が働くことを意味す

る。地上の二つの物体にもであろうかという疑問は当然学生・生徒たちの素朴な疑問であろう。当時の人々にも、やはり疑問であったに違いない。キャベンディッシュが、実際に歴史的に有名な実験をやってみて、地上の物体の間にも引力が働いていることを示した。今は業者の努力によって、キャベンディッシュの実験装置が教育機関向けに市販されている。大いにありがたいことである。

## 6　ケプラー雑記

ヨハネス・ケプラーは一風変わった、魅力ある人物である。その生涯もドラマティックで、学生・生徒の興味を引くに充分なものを持っている。ケプラーをもっと身近に感じてもらうために、随想風にケプラーの足取りを追ってみよう。

彼がその法則を発表するまでの軌跡をたどってみよう。テュービンゲンで学生生活を送ったヨハネスは、グラーツで数学教師の職についた。新教徒追放の嵐に巻き込まれた彼はプラハへと逃げる。そこでティコ・ブラーエと出会った彼は、ケプラーの法則として残る仕事をするのである。ドイツ30年戦争の時代に生きたケプラーは、時代の刻印を受け古い理念にとらわれ苦しみながら古い時代と格闘し、ついには新時代の扉を開けることになる。30年戦争で荒れに荒れたドイツの生きる道は、文化・芸術にあることを身をもって示したことになろう。

テュービンゲン、グラーツ、プラハはいずれも中世からの伝統がしっかりと残る中部ヨーロッパの珠玉の町々である。

テュービンゲンは今でもドイツの主要な大学町。町にはネッカー川が流れ、壮麗な市庁舎の前の広場には、カフェやレストランが並び、学生や教師の溜まり場となっている。町の周りには小高い丘が広がり、大学も科目によっては丘の上にある。さらに高く丘を上っていくと、ホーエン・テュービンゲン城が丘の上にどっしりと立っている。平野部の多いドイツにしては、起伏に富んだ環境を持った町である。この町で若き日をすごした人々の一部を挙げると、ヘーゲル、シェリング、ヘルダーリンそしてヘルマン・ヘッセとドイツを代表する名前が並ぶ。この町でヨハネスは天文学を学び、コペルニクスの地動説の洗礼を受けた。

ネッカーは町の外をゆっくりと流れ、河原には柳に似た大木が枝を川面にまで垂らし、夏の日は太陽がやさしく人々を包むようである。ここでの川幅は意外に狭い。しばらくするとネッカーは川幅を広げハイデルベル

クを通り、その後すぐラインに注ぐ。ラインはこのあたりで、ネッカー、マイン、モーゼルなどの流れを飲み込み、マインツ、コブレンツ、ボン、ケルン、デュッセルドルフを突き抜けて、オランダに注ぐのである。町から町へ流れる川。そしてその川に誘われるかのように、町から町へと放浪する若者たち。これがドイツ文化の一つの特徴である。若者ヨハネスはグラーツへと移っていく。

グラーツは東南部オーストリアの明るい町である。今に伝統を残す古い大学があるが、彼はこのグラーツ大学に勤務したのではない。徒弟時代の彼はそのような幸運には恵まれなかった。ちなみにグラーツ大学物理学科の建物の門をくぐると、壁に「シュレディンガー、マッハ、ボルツマン」などがこの大学で教授陣をはっていたことが記録されているが、ケプラーの名前はない。

ケプラーはこの町で奇妙な論文を書く。惑星の数がなぜ6個なのかという論文だ。彼は惑星の軌道の間に奇妙な関係があり、それは三次元の幾何学の必然的帰結であるということを証明しようとしたのである。もちろんこれは間違った理論であり、惑星の軌道の間の関係は、ケプラーの最初の「理論」とは精密には合致しなかった。そのために彼は正しい関係を知りたいと、その生涯をかけるのである。

現在この町を訪れると、小高い丘の周りに町が広がっているのがすぐにわかる。ふもとにはムール川がかなりの急流で流れ、川を渡ると市庁舎、その並びにはルネッサンス期からの建物が残り、建物の前面にはアールヌーボー風の絵が描かれている。そして少し路地を入ると、グラーツを代表するワインケラー「ケプラー・ケラー」が、そぞろ歩く人々を夕餉のワインへと楽しげに呼び寄せる。そこでは正装したケプラーが、まじめな顔をして、このワインケラーの看板を勤めている。

丘に登ろう。町からも良く見える時計の塔が、丘の中腹に立っているがどこか変である。よく見ると長針と短針がさかさまなのだ。だが時計台の下に広がるお花畑に包まれ、おとぎの国の世界に入った気分になった人々は、時間の狂いなど気にかけなくなる。

丘は高くはないが険しい。この丘に守られたグラーツは、中世には重要な軍事的要塞であった。近くはナポレオンにも占領されなかったことをグラーツっ子は自慢する。そして丘の中腹の心地よい散歩道は「ドクター・カール・ベーム・アレー」。指揮者のカール・ベームはこの町で生まれた。そういえば確かシューベルトの「未完成交響曲」は彼の死後、この町で発見された。若すぎる死の直前まで、陰気なウイーンから明るい

この町を訪れることを楽しみにしていたというから、ひょっとして彼はここで未完成を完成させることを考えていたのかもしれない。

丘を越えると、そこでは空を突くような高い木々が夏の日差しを遮り、噴水が高く心地よく水を噴き上げる。市民公園である。そしてケプラーの法則が記された記念碑のそばにヨハネスの銅像が立っている。モーツァルトを追い出したザルツブルグの町が、今ではその音楽で持っているように、ケプラーを追い出したグラーツは、今ではとても彼を大切にする。

ケプラーはグラーツを追われた。プラハに行ってティコの助手になる。そこでケプラーの法則を発見するのである。ケプラーはこの法則を発見するときも、発見した後も、決して恵まれなかった。この点物理学者も画家や音楽家のように、科学上芸術上の達成と世間的な成功とは全く関係がないという、無情な法則を身を持って発見せねばならぬのである。プラハに行った後のケプラーの足取りは、手に入りやすい研究書や解説書があるのでそれを読んでいただきたい。実は筆者は、テュービンゲンとグラーツは何度も行っているが、まだプラハに行く機会に恵まれていないのである。

# 参考文献


[1] 朝永振一郎：物理学とは何だろうか、岩波書店、1979.

[2] 朝永振一郎編：物理学読本、みすず書房、1969.

[3] R.P. ファインマン：ファインマンさん力学を語る、岩波書店、1996.

[4] 英語版が比較的簡単に手に入る。
ISAAC NEWTON, ”The Principia”, Translated by Andrew Motte, Prometheus Books, New York, 1995.

[5] R.P. ファインマン：ファインマン物理学 I　力学、坪井忠二訳、岩波書店、1967.

[6] 山本義隆：古典力学の形成、日本評論社、1997.

[7] 山本義隆：重力と力学的世界、現代数学社、1981.

[8] 森毅：現代の古典解析、現代数学社、1970.

[9] 森毅：微積分の意味、日本評論社、1978.

[10] 米田雅人:ホームページ
http://web1.incl.ne.jp/oyone/

[11] 山本義隆：重力と磁力概念の発展、みすず書房、2003.

[12] 日本惑星協会ホームページ：
http://www.planetary.or.jp/solar_main.html

[13] 川辺六雄:世界の名著「ニュートン」、中央公論社、1971.

[14] チャンドラセカール: 「チャンドラセカールの『プリンキピア』講義」—一般読者のために— 中村誠太郎　監訳、講談社、1998.